# Билет 28. Понятие устойчивости. Виды устойчивости: устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость, экспоненциальная устойчивость, качественная экспоненциальная устойчивость непрерывных и дискретных систем

Устойчивость дифуров (все то же имеет отноешние и к динамическим системам)

<http://www.math24.ru/%D0%BE%D1%81%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%BD%D1%8B%D0%B5-%D0%BF%D0%BE%D0%BD%D1%8F%D1%82%D0%B8%D1%8F-%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D0%B8-%D1%83%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B8.html>

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Предположим, что некоторое явление описывается системой *n* дифференциальных уравнений  система n дифференциальных уравнений  с начальными условиями  http://www.math24.ru/images/8sde2.gif  Будем считать, что функции *fi*(*t*, *x*1, *x*2, ..., *xn*) определены и непрерывны вместе со своими частными производными на множестве {*t* ∈ [*t*0, +∞), *xi* ∈ ℜ*n*}. Далее без ограничения общности полагаем, что начальный момент равен нулю: *t*0 = 0.   Систему дифференциальных уравнений удобнее записать в векторной форме:  система n дифференциальных уравнений в векторной форме  В реальных системах начальные условия задаются с определенной точностью. Поэтому возникает естественный вопрос: как малые изменения начальных условий влияют на поведение решения при больших временах - в предельном случае при *t* → ∞?   Если траектория движения системы мало изменяется при малых возмущениях начального положения, то говорят, что движение системы является *устойчивым*.   Строгое определение устойчивости в терминах *ε-δ*-нотации было предложено в 1892 году русским математиком А.М.Ляпуновым (1857-1918). Рассмотрим более подробно понятие устойчивости, введенное Ляпуновым.  ***Устойчивость по Ляпунову***  Решение *φ*(*t*) системы дифференциальных уравнений  http://www.math24.ru/images/8sde4.gif  с начальными условиями  http://www.math24.ru/images/8sde5.gif  *устойчиво* (*в смысле Ляпунова*), если для любого *ε* > 0 найдется число *δ = δ*(*ε*) > 0, такое, что если  http://www.math24.ru/images/8sde6.gif  для всех значений *t* ≥ 0. В противном случае решение *φ*(*t*) называется *неустойчивым*.   В качестве нормы для измерения расстояния между точками можно использовать, например, *эвклидову метрику* ||*xe*|| или *метрику Манхеттена* ||*xm*||:  эвклидова метрика и метрика Манхеттена  В случае *n* = 2 устойчивость по Ляпунову означает, что любая траектория *X*(*t*), которая начинается в *δ*(*ε*)-окрестности точки *φ*(0), остается внутри трубки с максимальным радиусом *ε* при всех *t* ≥ 0 (рисунок 1).   |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | понятие устойчивости в смысле Ляпунова |  | асимптотическая устойчивость | | | | | **Рис.1** |  | **Рис.2** | | | | | экспоненциальная устойчивость | | |  | орбитальная устойчивость | | **Рис.3** | | |  | **Рис.4** |   ***Асимптотическая и экспоненциальная устойчивость***  Если решение *φ*(*t*) системы дифференциальных уравнений не только устойчиво в смысле Ляпунова, но и удовлетворяет соотношению  http://www.math24.ru/images/8sde8.gif  при условии  http://www.math24.ru/images/8sde9.gif  то говорят, что решение *φ*(*t*) является *асимптотически устойчивым*. В этом случае все решения, достаточно близкие к *φ*(0) в начальный момент времени, постепенно сходятся к *φ*(*t*) при увеличении *t*. Схематически это показано на рисунке 2.   Если решение *φ*(*t*) асимптотически устойчиво и, кроме того, из условия  http://www.math24.ru/images/8sde10.gif  следует, что  определение экспоненциальной устойчивости  для всех *t* ≥ 0, то говорят, что решение *φ*(*t*) является *экспоненциально устойчивым*. В таком случае все решения, близкие к *φ*(0) в начальный момент, сходятся к *φ*(*t*) со скоростью (большей или равной), которая определяется экспоненциальной функцией с параметрами *α, β* (рисунок 3).   Общая теория устойчивости, помимо устойчивости в смысле Ляпунова, содержит много других концепций и определений устойчивого движения. В частности, важное значение имеют понятия *орбитальной* и*структурной устойчивости*.  ***Орбитальная устойчивость***  Орбитальная устойчивость описывает поведение замкнутой траектории (орбиты) под действием малых внешних возмущений.   Рассмотрим автономную систему  http://www.math24.ru/images/8sde12.gif  т.е. систему уравнений, правая часть которых не содержит в явном виде независимой переменной *t*. В векторном виде автономная система записывается как  http://www.math24.ru/images/8sde13.gif  Пусть *φ*(*t*) − периодическое решение заданной автономной системы, т.е. имеет вид замкнутой траектории (орбиты). Если для любого *ε* > 0 найдется постоянное число *δ = δ*(*ε*) > 0, такое, что траектория всякого решения *X*(*t*), начинающегося в *δ-*окрестности траектории *φ*(*t*), остается в *ε-*окрестности траектории *φ*(*t*) при всех *t* ≥ 0, то такая траектория *φ*(*t*) называется *орбитально устойчивой* (рисунок 4).   По аналогии с асимптотической устойчивостью в смысле Ляпунова вводится также понятие*асимптотической орбитальной устойчивости*. Такой тип движения реализуется, например, в системах, имеющих *предельный цикл*.  ***Структурная устойчивость***  Предположим, что у нас имеются две автономных системы с близкими свойствами - в том смысле, что их фазовые портреты содержат одинаковые особые точки и геометрически похожие траектории. Такие системы можно назвать *структурно устойчивыми*.   В строгом определении требуется, чтобы данные системы были *орбитально топологически эквивалентными*, т.е. должен существовать *гомеоморфизм* (это страшное слово означает взаимно-однозначное и непрерывное отображение), который преобразует семейство траекторий первой системы в семейство траекторий второй системы с сохранением направления движения. В этих терминах определение структурной устойчивости формулируется следующим образом.   Рассмотрим автономную систему, которая в невозмущенном и возмущенном состоянии описывается, соответственно, двумя уравнениями:  http://www.math24.ru/images/8sde14.gif  Если для любой ограниченной и непрерывно-дифференцируемой векторной функции *g*(*X*) существует число*ε* > 0, такое, что траектории невозмущенной и возмущенной системы являются *орбитально топологически эквивалентными*, то такая система называется *структурно устойчивой*.  ***Редукция к задаче об устойчивости нулевого решения***  Пусть задана произвольная неавтономная система  http://www.math24.ru/images/8sde15.gif  с начальным условием *X*(0) = *X*0 (задача Коши), где вектор-функция *f* определена на множестве{*t* ∈ [*t*0, +∞), *xi* ∈ ℜ*n*}.   Предположим, что данная система имеет решение *φ*(*t*), устойчивость которого требуется исследовать. Анализ устойчивости упрощается, если рассмотреть возмущения  http://www.math24.ru/images/8sde16.gif  для которых получается дифференциальное уравнение  http://www.math24.ru/images/8sde17.gif  Очевидно, что последнему уравнению удовлетворяет *нулевое решение*  http://www.math24.ru/images/8sde18.gif  что соответствует тождеству  http://www.math24.ru/images/8sde19.gif  Таким образом, исследование устойчивости решения *φ*(*t*) можно заменить на исследование устойчивости функции *Z*(*t*) вблизи точки *Z* = 0.  ***Устойчивость линейных систем***  Линейная система  http://www.math24.ru/images/8sde20.gif  называется устойчивой, если все ее решения устойчивы в смысле Ляпунова.   Оказывается, что неоднородная линейная система будет устойчивой при любом свободном члене *f*(*t*), если устойчиво нулевое решение соответствующей однородной системы  http://www.math24.ru/images/8sde21.gif  Поэтому при изучении устойчивости в классе линейных систем достаточно ограничиться анализом*однородных дифференциальных систем*. В наиболее простом случае, когда матрица коэффициентов *A*является постоянной, условия устойчивости формулируются в терминах *собственных значений* матрицы *A*.   Рассмотрим однородную линейную систему  http://www.math24.ru/images/8sde22.gif  где *A* − постоянная матрица размером *n* × *n*. Такая система (она также является *автономной*) имеет нулевое решение *X*(*t*) = 0. Устойчивость данного решения определяется следующими теоремами.   Пусть *λi* − собственные числа матрицы *A*.   *Теорема 1*. Линейная однородная система с постоянными коэффициентами *устойчива в смысле Ляпунова*тогда и только тогда, когда все собственные значения *λi* матрицы *A* удовлетворяют соотношению  http://www.math24.ru/images/8sde23.gif  причем у собственных значений, действительная часть которых равна нулю, алгебраическая и геометрическая кратность должны быть одинаковы (т.е. соответствующие *жордановы клетки* должны быть размера 1 × 1).   *Теорема 2*. Линейная однородная система с постоянными коэффициентами является *асимптотически устойчивой* тогда и только тогда, когда все собственные значения *λi* имеют отрицательные действительные части:  http://www.math24.ru/images/8sde24.gif  *Теорема 3*. Линейная однородная система с постоянными коэффициентами *неустойчива*, если выполнено хотя бы одно из условий:   * матрица *A* имеет собственное значение *λi* с положительной действительной частью; * матрица *A* имеет собственное значение *λi* с нулевой действительной частью, причем геометрическая кратность собственного числа *λi* меньше его алгебраической кратности.   Приведенные теоремы позволяют исследовать устойчивость линейных систем с постоянными коэффициентами, зная собственные значения и собственные векторы. Однако во многих случаях характер устойчивости можно определить, не решая систему уравнений, а используя *критерии устойчивости*. Одним из таких признаков устойчивости является [критерий Рауса-Гурвица](http://www.math24.ru/%D0%BA%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%B8%D0%B9-%D1%80%D0%B0%D1%83%D1%81%D0%B0-%D0%B3%D1%83%D1%80%D0%B2%D0%B8%D1%86%D0%B0.html). Он позволяет судить об устойчивости системы, зная лишь коэффициенты характеристического уравнения матрицы *A*.  ***Устойчивость по первому приближению***  Рассмотрим нелинейную автономную систему  http://www.math24.ru/images/8sde25.gif  Предположим, что система имеет нулевое решение *X* = 0, которое будем исследовать на устойчивость.   Считая функции *fi*(*X*) дважды непрерывно дифференцируемыми в некоторой окрестности начала координат, можно разложить правую часть в ряд Маклорена:  разложение системы дифференциальных уравнений в ряд Маклорена  где слагаемые *Ri* описывают члены второго (и более высокого) порядка малости относительно координатных функций *x*1, *x*2, ..., *xn*.   Возвращаясь к векторно-матричной записи, получаем:  http://www.math24.ru/images/8sde27.gif  где якобиан *J* определяется формулой  якобиан системы дифференциальных уравнений вблизи положения равновесия  Значения частных производных в этой матрице вычисляются в точке разложения в ряд, т.е. в данном случае в нуле.   Во многих случаях вместо исходной нелинейной автономной системы можно рассматривать и исследовать на устойчивость соответствующую линеаризованную систему или *систему уравнений первого приближения*. Устойчивость такой системы определяется следующими признаками:   * Если все собственные значения якобиана *J* имеют *отрицательные действительные части*, то нулевое решение *X* = 0 исходной системы и линеаризованной является *асимптотически устойчивым*. * Если хотя бы одно собственное значение якобиана *J* имеет *положительную действительную часть*, то нулевое решение *X* = 0 исходной системы и линеаризованной системы является *неустойчивым*.   В критических случаях, когда собственные числа имеют действительную часть, равную нулю, следует использовать другие методы исследования устойчивости. Задачи на устойчивость по первому приближению приведены [здесь](http://www.math24.ru/%D1%83%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C-%D0%B2-%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B2%D0%BE%D0%BC-%D0%BF%D1%80%D0%B8%D0%B1%D0%BB%D0%B8%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B8.html).  ***Функции Ляпунова***  Одним из мощных инструментов анализа устойчивости систем дифференциальных уравнений, включая нелинейные системы, являются *функции Ляпунова*. Данная техника подробно рассматривается на отдельной web-странице "[Метод функций Ляпунова](http://www.math24.ru/%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4-%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B9-%D0%BB%D1%8F%D0%BF%D1%83%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B0.html)". |
| **Пример 1** |
|  |
| Используя определение устойчивости по Ляпунову, показать, что нулевое решение системы устойчиво.  http://www.math24.ru/images/8sde29.gif  *Решение.*  Сначала найдем общее решение системы. Собственные значения *λi* матрицы коэффициентов *A* равны:  http://www.math24.ru/images/8sde30.gif  Определим собственный вектор *V*1 = (*V*11, *V*21)*T* для собственного значения *λ*1 = −1 + *i* :  http://www.math24.ru/images/8sde31.gif  Полученные уравнения являются линейно зависимыми. Поэтому, полагая *V*21 = *t*, из второго уравнения находим:  http://www.math24.ru/images/8sde32.gif  Следовательно, собственный вектор *V*1 равен:  http://www.math24.ru/images/8sde33.gif  Тогда решение *X*1(*t*), соответствующее комплексному числу *λ*1 = −1 + *i*, имеет вид:  http://www.math24.ru/images/8sde34.gif  Разложим экспоненциальную функцию по *формуле Эйлера*:  http://www.math24.ru/images/8sde35.gif  Получаем  http://www.math24.ru/images/8sde36.gif  Отсюда видно, что действительная и мнимая части решения равны:  http://www.math24.ru/images/8sde37.gif  Следовательно, общее решение системы выражается формулой  http://www.math24.ru/images/8sde38.gif  или  http://www.math24.ru/images/8sde39.gif  Полагая, что в начальный момент *t* = 0 система находится в точке (*x*0, *y*0), получаем:  http://www.math24.ru/images/8sde40.gif  С учетом этого решение можно записать в следующем виде:  http://www.math24.ru/images/8sde41.gif  Траектория этого решения выходит из точки (*x*0, *y*0).   Теперь исследуем устойчивость нулевого решения, которое обозначим как *φ*(*t*) ≡ 0. Согласно определению устойчивости по Ляпунову введем некоторое число *ε* > 0 и найдем соответствующее ему число *δ = δ*(*ε*) > 0, такое, что при  http://www.math24.ru/images/8sde42.gif  будет выполняться соотношение  http://www.math24.ru/images/8sde43.gif  для всех *t* ≥ 0.   Пусть возмущенное решение *X*(*t*) в начальный момент имеет координаты (*x*0, *y*0). Считая, что отклонение от нуля по каждой из координат не превосходит *δ/2* и применяя неравенство треугольника, можно записать:  http://www.math24.ru/images/8sde44.gif  Здесь в качестве нормы мы использовали обычную эвклидову метрику.   Установим связь между числами *δ* и *ε*. Подставляя известные выражения для решения *X*(*t*) = (*x*(*t*), *y*(*t*)), получаем:  http://www.math24.ru/images/8sde45.gif  Итак, если мы положим *δ* = *ε*/√2, то все возмущенные траектории, выходящие из точки (*x*0, *y*0), при условии|*x*0| < *δ*/2, |*y*0| < *δ*/2 будут оставаться в трубке с радиусом *ε*. Таким образом, система является *устойчивой в смысле Ляпунова*.   Заметим, что на самом деле выполняется более сильное условие:  http://www.math24.ru/images/8sde46.gif  т.е. система является *асимптотически устойчивой*. |
| **Пример 2** |
|  |
| Исследовать на устойчивость и асимптотическую устойчивость нулевое решение системы, общее решение которой имеет вид  http://www.math24.ru/images/8sde47.gif  *Решение.*  Пусть начальные условия заданы в виде *x*(0) = *x*0, *y*(0) = *y*0. Выразим общее решение системы через координаты *x*0, *y*0:  http://www.math24.ru/images/8sde48.gif  Тогда  http://www.math24.ru/images/8sde49.gif  Предположим, что решения *x*(*t*), *y*(*t*) при всех значениях *t* ≥ 0 удовлетворяют соотношениям  http://www.math24.ru/images/8sde50.gif  где *ε* − произвольное положительное число. В соответствии с определением устойчивости по Ляпунову попробуем подобрать число *δ*(*ε*), зависящее от *ε*, такое, чтобы выполнялись неравенства  http://www.math24.ru/images/8sde51.gif  В результате получаем  http://www.math24.ru/images/8sde52.gif  Учтем, что функция *g*(*t*) = *t*2exp(−*t*) является ограниченной. Действительно,  http://www.math24.ru/images/8sde53.gif  При *t* = 2 функция *g*(*t*) = *t*2exp(−*t*) имеет максимум, равный  http://www.math24.ru/images/8sde54.gif  Тогда неравенство для |*y*(*t*)| записывается в виде  http://www.math24.ru/images/8sde55.gif  Если мы теперь выберем *δ = ε*/2, так что  http://www.math24.ru/images/8sde56.gif  то будут заведомо выполняться неравенства  http://www.math24.ru/images/8sde57.gif  Следовательно, нулевое решение заданной системы уравнений *устойчиво*.   Из формул для *x*(*t*), *y*(*t*) видно, что система не является *асимптотически устойчивой*, поскольку при *t* → ∞значения *x*(*t*), *y*(*t*) не стремятся к нулю. |
| **Пример 3** |
|  |
| Определить, при каких значениях параметров *a*, *b* нулевое решение системы  http://www.math24.ru/images/8sde58.gif  является асимптотически устойчивым?  *Решение.*  Вычислим собственные значения *λi* матрицы коэффициентов *A*:  http://www.math24.ru/images/8sde59.gif  Решим полученное квадратное уравнение с параметрами *a*, *b*.  http://www.math24.ru/images/8sde60.gif  Как видно, дискриминант всегда положительный. Поэтому собственные значения являются действительными числами и определяются формулой  http://www.math24.ru/images/8sde61.gif  Найдем множество значений чисел *a*, *b*, при которых собственные значения *λ*1, *λ*2 отрицательны (что соответствует условию асимптотической устойчивости системы):  http://www.math24.ru/images/8sde62.gif  Складывая оба неравенства, получаем *a + b* < 0. В таком случае второе неравенство  http://www.math24.ru/images/8sde64.gif  выполняется при всех *a*, *b*, удовлетворяющих условию *a + b* < 0.   Решим первое неравенство:  http://www.math24.ru/images/8sde65.gif  Решение обоих элементарных неравенств показаны графически на рисунке 5. Общим решением является область (заштрихованная зеленым цветом), расположенная ниже гиперболы *ab* = 1 в левой полуплоскости. При всех значениях *a*, *b* из этой области решение системы будет *асимптотически устойчивым*.   |  |  |  | | --- | --- | --- | | область асимптотической устойчивости |  |  | | **Рис.5** |  |  | |

Из википедии:

<https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C>

**Устойчивость** — способность системы сохранять текущее состояние при влиянии внешних воздействий.

* В макроэкономике [устойчивость](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D0%B5_%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B2%D0%B8%D1%82%D0%B8%D0%B5) обозначает долгосрочное равновесие между эксплуатацией ресурсов и развитием человеческого общества.
* В метеорологии [воздушная устойчивость](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%92%D0%BE%D0%B7%D0%B4%D1%83%D1%88%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%83%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C&action=edit&redlink=1) относится к вертикальным перемещениям воздушных потоков.
* **В технике устойчивость определяется как свойство технических систем сохранять значения конструктивных и режимных параметров в заданных пределах:**
  + **теплогидравлическая устойчивость — свойство канальных систем с обогревом потоков сохранять параметры движения и параметры теплопередачи.**
  + **нейтронно-теплогидравлическая устойчивость ядерных реакторов — свойство ядерных реакторов сохранять стабильность процессов тепловыделения и теплосьема в активной зоне.**
* **В механике**[**устойчивость**](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_(%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D1%8B))**характеризуется ответом на малое возмущение системы, находящейся в механическом равновесии. Различают**[**асимптотическую устойчивость**](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_(%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D1%8B)#.D0.90.D1.81.D0.B8.D0.BC.D0.BF.D1.82.D0.BE.D1.82.D0.B8.D1.87.D0.B5.D1.81.D0.BA.D0.B0.D1.8F_.D1.83.D1.81.D1.82.D0.BE.D0.B9.D1.87.D0.B8.D0.B2.D0.BE.D1.81.D1.82.D1.8C)**,**[**устойчивость по Ляпунову**](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_(%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D1%8B)#.D0.A3.D1.81.D1.82.D0.BE.D0.B9.D1.87.D0.B8.D0.B2.D0.BE.D1.81.D1.82.D1.8C_.D0.BF.D0.BE_.D0.9B.D1.8F.D0.BF.D1.83.D0.BD.D0.BE.D0.B2.D1.83)**, экспоненциальную устойчивость,**[**асимптотическую устойчивость в целом**](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_(%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D1%8B)#.D0.90.D1.81.D0.B8.D0.BC.D0.BF.D1.82.D0.BE.D1.82.D0.B8.D1.87.D0.B5.D1.81.D0.BA.D0.B0.D1.8F_.D1.83.D1.81.D1.82.D0.BE.D0.B9.D1.87.D0.B8.D0.B2.D0.BE.D1.81.D1.82.D1.8C_.D0.B2_.D1.86.D0.B5.D0.BB.D0.BE.D0.BC)**и др.**
  + [Гидродинамическая устойчивость](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B8%D0%B4%D1%80%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D1%83%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C) — свойство потоков сохранять скорость и направление движения
* В социологии также существует термин [социальная устойчивость](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A1%D0%BE%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%83%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C&action=edit&redlink=1).
* На судах устойчивость (профессиональный термин — [остойчивость](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C)) связана с восстанавливающим моментом и противодействием опрокидыванию.
* В теории автоматического управления [устойчивость](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A3%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_(%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D1%83%D0%BF%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)&action=edit&redlink=1) характеризуется реакцией динамической системы на внешние воздействия.
* В теории вероятностей определяют [статистическую устойчивость](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A1%D1%82%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D1%83%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C&action=edit&redlink=1) как сходимость частот значений результатов измерения физической величины.
* В численном анализе **устойчивость** показывает, каким образом алгоритм связан с ошибками в вычислениях (см. [численная устойчивость](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A7%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%83%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C)).
* В авиации **устойчивость** характеризует способность самолета без вмешательства пилота сохранять заданный режим полета (см. [устойчивость и управляемость](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_%D0%B8_%D1%83%D0%BF%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BB%D1%8F%D0%B5%D0%BC%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C))
* В теории музыки — свойство, придающее звуку или системе звуков их постоянство.

Из википедии:

<https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_(%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D1%8B)>

## Устойчивость по Ляпунову[[править](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A3%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_(%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D1%8B)&veaction=edit&vesection=2) | [править вики-текст](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A3%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_(%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D1%8B)&action=edit&section=2)]

Тривиальное решение *x = 0* системы (1) называется устойчивым по [Ляпунову](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D1%8F%D0%BF%D1%83%D0%BD%D0%BE%D0%B2,_%D0%90%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%B0%D0%BD%D0%B4%D1%80_%D0%9C%D0%B8%D1%85%D0%B0%D0%B9%D0%BB%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%87), если для любых t_0 \in I и \varepsilon > 0 существует \delta > 0, зависящее только от *ε* и*t0* и не зависящее от *t*, такое, что для всякого *x0*, для которого \|x_0\| < \delta, решение *x* системы с начальными условиями x(t0) = x0 продолжается на всю полуось t > t0 и удовлетворяет неравенству \|x(t)\| < \varepsilon.

Символически это записывается так:

(\forall \varepsilon > 0)(\forall t_0 \in I)(\exists \delta(t_0, \varepsilon) > 0)(\forall x_0 \in B_{\delta(t_0, \varepsilon)})(\forall t \ge t_0, t \in J^+) \Rightarrow (\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon)

## Равномерная устойчивость по Ляпунову[[править](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A3%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_(%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D1%8B)&veaction=edit&vesection=3) | [править вики-текст](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A3%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_(%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D1%8B)&action=edit&section=3)]

Тривиальное решение *x = 0* системы (1) называется равномерно устойчивым по Ляпунову, если δ из предыдущего определения зависит только от ε:

(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall t_0 \in I)(\forall x_0 \in B_{\delta(\varepsilon)})(\forall t \ge t_0, t \in J^+) \Rightarrow (\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon)

## Неустойчивость по Ляпунову[[править](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A3%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_(%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D1%8B)&veaction=edit&vesection=4) | [править вики-текст](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A3%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_(%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D1%8B)&action=edit&section=4)]

Тривиальное решение *x = 0* системы (1) называется неустойчивым по Ляпунову, если:

(\exists \varepsilon > 0)(\exists t_0 \in I)(\forall \delta > 0)(\exists x_0 \in B_\delta)(\exists t_* \ge t_0, t_* \in J^+) \Rightarrow (\|x(t_*, t_0, x_0)\| \ge \varepsilon)

## Асимптотическая устойчивость[[править](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A3%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_(%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D1%8B)&veaction=edit&vesection=5) | [править вики-текст](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A3%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_(%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D1%8B)&action=edit&section=5)]

Тривиальное решение *x = 0* системы (1) называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и выполняется условие \lim_{t \to \infty} \|x(t_*, t_0, x_0)\| = 0 для всякого *x* с начальным условием *x0*, лежащим в достаточно малой окрестности нуля.

### Эквиасимптотическая устойчивость[[править](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A3%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_(%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D1%8B)&veaction=edit&vesection=6) | [править вики-текст](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A3%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_(%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D1%8B)&action=edit&section=6)]

Тривиальное решение *x = 0* системы (1) называется эквиасимптотически устойчивым, если оно равномерно устойчивое и равномерно притягивающее.

### Равномерная асимптотическая устойчивость[[править](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A3%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_(%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D1%8B)&veaction=edit&vesection=7) | [править вики-текст](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A3%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_(%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D1%8B)&action=edit&section=7)]

Тривиальное решение системы (1) называется равномерно асимптотически устойчивым, если оно устойчивое и эквипритягивающее.

### Асимптотическая устойчивость в целом[[править](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A3%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_(%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D1%8B)&veaction=edit&vesection=8) | [править вики-текст](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A3%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_(%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D1%8B)&action=edit&section=8)]

Тривиальное решение *x = 0* системы (1) называется асимптотически устойчивым в целом, если оно устойчивое и глобальнопритягивающее.

### Равномерная асимптотическая устойчивость в целом[[править](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A3%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_(%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D1%8B)&veaction=edit&vesection=9) | [править вики-текст](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A3%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%D1%87%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_(%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D1%8B)&action=edit&section=9)]

Тривиальное решение *x = 0* системы (1) называется равномерно асимптотически устойчивым в целом, если оно равномерно устойчивое и равномерно- и глобальнопритягивающее.